1. soru	2. soru	3. soru	Toplam

Adı Soyadı:

Numara: **19.03.2024**

MAT 212 ANALİZ IV DERSİ KISA SINAV SORULARI

1) Aşağıda verilen limitleri (varsa) hesaplayınız (60 puan).

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$ **b)** $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \left(x+y+1, \dfrac{|x-y|}{x-y}\right)$ **c)** $\lim\limits_{(x,y)\to(4,3)} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$

2)
$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

fonksiyonunun $(0,0)$ noktasındaki süreklilliğini araştırınız (20 puan).

3) $f(x,y)=x+y$ fonksiyonunun $\mathbb{R}^2$ de düzgün sürekli olup olmadığını araştırınız (20 puan).

Not: 1. sorudaki her şık 20 puandır. Süre 60 dakikadır.

Dr. Erdem TOKSOY

Scanned with CamScanner

ANALİZ IV DERSİ

KISA SINAV CEVAP ANAHTARI

1) a) Eğer $x^2+y^2=u$ denirse $(x,y)\to(0,0) \Leftrightarrow u\to 0$ olur.

Böylece $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$

bulunur.

b) $f_1(x,y)=x+y+1$ ve $f_2(x,y)=\dfrac{|x-y|}{x-y}$ olsun. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f_2(x,y)$

limitini araştıralım. Ardışık limitlere bakılırsa

$$\lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 1} f_2(x,y)\right) = \lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 1}\frac{|x-y|}{x-y}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1}$$

olur. $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|x-1|}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)}{(x-1)} = 1$ ve $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x-1|}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} -\dfrac{(x-1)}{(x-1)} = -1$

olduğundan limit yoktur.

$$\lim_{y\to 1}\left(\lim_{x\to 1} f_2(x,y)\right) = \lim_{y\to 1}\left(\lim_{x\to 1}\frac{|x-y|}{x-y}\right) = \lim_{y\to 1}\frac{|1-y|}{1-y}$$

olur. $\lim\limits_{y\to 1^+}\dfrac{|1-y|}{1-y} = \lim\limits_{y\to 1^+} -\dfrac{(1-y)}{(1-y)} = -1$ ve $\lim\limits_{y\to 1^-}\dfrac{|1-y|}{1-y} = \lim\limits_{y\to 1^-}\dfrac{(1-y)}{(1-y)} = 1$

olduğundan limit yoktur. O halde ardışık limitler var olmadığından

$\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f_2(x,y)$ limiti yoktur. Bu takdirde f_2 bileşen fonksiyonunun limiti

var olmadığından $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(f_1(x,y),\, f_2(x,y)\right)$ limiti yoktur.

c) $$\lim_{(x,y)\to(4,3)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{\dfrac{x-y-1}{(\sqrt{x}+\sqrt{y+1})}} = \lim_{(x,y)\to(4,3)} \frac{(x-y-1)}{(x-y-1)(\sqrt{x}+\sqrt{y+1})}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(4,3)} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y+1}} = \frac{1}{4}$$

bulunur.

Scanned with CamScanner

2) Önce $(0,0)$ da ardışık limitlere bakalım.

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}\right)=\lim_{x\to 0}0=0\ ,\quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}\right)=\lim_{y\to 0}0=0$$

olur. $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ denirse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}=\lim_{r\to 0}\frac{2r^2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt[3]{r^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}}=\lim_{r\to 0}2.r^{\frac{4}{3}}.\sin\theta.\cos\theta=0$$

bulunur. Şimdi $(0,0)$ da limitin 0 olduğunu gösterelim $\forall\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde

$$0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$$

olan $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ için

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}\right|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı bulalım. O halde

$$0<\|(x,y)\|<\delta \text{ iken } |y|<\delta \text{ ve } |x|<\delta$$

olup

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{2xy}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}\right|=2.\frac{|x|}{|\sqrt[3]{x^2+y^2}|}.|y|\leq 2.\frac{|x|}{|x|^{2/3}}.|y|=2.|x|^{1/3}.|y|<2\delta^{4/3}$$

yazılır. Eğer $\delta=\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{3/4}$ alınırsa aynı $\varepsilon>0$ sayısı için

$$0<\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$$

iken

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon$$

olur. Böylece $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ dır. Ayrıca $f(0,0)=0$ olup

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$ olduğundan f fonksiyonu $(0,0)$ noktasında

süreklidir.

Scanned with CamScanner

3) f nin $\mathbb{R}^2$ de düzgün sürekli olduğunu gösterelim.

$\forall \varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde

$$\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| < \delta$$

olan $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulalım. Burada

$$\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

olup

$\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| < \delta$ iken $|x_1-x_2| < \delta$ ve $|y_1-y_2| < \delta$ olduğundan

$$\begin{aligned} |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| &= |x_1+y_1-x_2-y_2| \\ &= |(x_1-x_2)+(y_1-y_2)| \\ &\leq |x_1-x_2|+|y_1-y_2| \\ &< \delta+\delta = 2\delta \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ alınırsa aynı $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)\| < \delta$$

iken

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| < \varepsilon$$

olur. Bu takdirde f, $\mathbb{R}^2$ de düzgün süreklidir.

Scanned with CamScanner